

# 臺北市第 52 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書封面

科 別：數 學

組 別：國小組

作品名稱：骰動人生 - 好運旺旺來

關 鍵 詞：骰子、機率、期望值

## 摘要

在各式各樣的桌遊無形潛移默化地幫助我們了解數學的有趣之處。我們這次挑選的桌遊是「骰子街」，在我們的遊戲實驗中發現輸贏的機率會因「卡牌顏色選擇」、「骰子數量」、「城市地標順序」而有所影響，想贏的話得靠智力(策略)，而非運氣。我們最先發現了擲一顆骰子與二顆骰子出現點數的範圍不同與出現頻率的不同，進而嘗試了解擲二顆骰子時各點數的出現機率。在選擇建設哪一張卡牌比較有利時，因為有了出現機率高低不同，所以優先選擇出現機率高、成本能接受的卡牌，進行在老師的指導下，學習了收入期望值的計算。最後考量卡牌的建設成本與其收入期望值，那就能有快又有效率的構畫出遊戲策略了。

## 壹、研究動機

桌遊就是桌上遊戲。我們最快樂的時光，當然就是玩囉！在各式各樣的桌遊無形潛移默化地我們學習到某些事情。我們這次挑選的桌遊是「骰子街」，在我們的遊戲實驗中發現輸贏的機率會因「骰子點數出線機率」、「骰子數量」、「選擇購買的建物」而有所影響，想贏的話得靠智力(策略)，而非運氣。

在遊戲的過程中，想到過去課本所學到：國小一至二年級統計與機率單元「能將資料做分類與整理，並說明其理由」、國小三至四年級「能報讀生活中常見的表格」，以及配合老師指導的在國中課程所出現的「能在具體情境中認識機率的觀念」等，以桌遊遊戲為實例，思考遊戲策略。

## 貳、研究目的

探討影響「骰子街」桌遊贏的因素，思考購買哪一個建築物比較會獲勝。

- 一、骰子點數：卡牌效果與骰子點數有關，依據卡牌效果，如果自己或其他玩家骰到自己手上卡牌就可以獲利，哪個骰子點數比較容易出現？
- 二、卡牌種類：要選擇互相幫助共同獲利的藍色卡？靠自己獨賺的綠色卡？或是設陷阱收對手錢的紅色及紫色卡？
- 三、骰子的數字：選擇要骰一顆骰子比較有利？還是骰兩顆骰子比較有利？
- 四、城市地標順序：四大城市地標建設的先後順序？

## 參、研究設備及器材

骰子街桌遊、相機、電腦、紙、筆、魔術方塊盒子。



【圖 1 研究設備與器材】

### ※ 遊戲規則說明 ※

一、遊戲人數：4 人

二、卡牌總數：108 張

三、遊戲介紹：骰子街是每人利用僅有的小麥田與麵包店(起始卡牌)，藉由擲骰子賺錢投資建設(補充卡牌)，最先蓋好「主題樂園、廣播電台、購物中心及火車站」等四大地標建置物的人就是贏家。

四、遊戲過程：

(一)每位玩家取得 1 張小麥田、1 張麵包店與 3 塊錢。

(二)依序擲骰子 1 顆(或 2 顆)，骰子的點數對應玩家手上卡牌，每張卡牌各有不同的效果，依據該效果賺錢(或賠給其他玩家錢)。

(三)買建築(卡牌)，每張卡牌有不同的建設成本，玩家衡量手上的資金投資建設。

(四)存到足夠的錢可以購買地標建築物，當擁有火車站卡牌時，可以選擇該回合擲 1 顆骰子或 2 顆骰子(若選擇擲 2 顆骰子，點數為 2 顆骰子加總)。

(五)最先集滿四張地標建築物玩家獲勝。

(六)補充說明：遊戲中可能出現擲骰之後多張卡牌同時被啟動的狀況，如果發生時，依據紅色(咖啡館、家庭餐廳等)、綠色(麵包店…等)、藍色(小麥田…等)、紫色(商業中心…等)依序執行。

五、卡牌說明：

(一) 卡牌中有遊戲一開始就擁有的起始建築物，小麥田與麵包店，草創期間就是利用這兩張卡牌賺錢，共有 8 張。另外，還有起始地標建築物(褐色卡牌)，一開始尚未存有足夠錢時是背面，購買後才能翻為正面，共有 16 張。

(二) 其他補充卡牌共有 84 張，包括藍色、綠色、紅色、紫色不同種類的建築物，詳下圖。

(三) 各卡牌上的資訊包括啟動卡牌效果所需的骰子點數、卡牌種類與名稱、卡牌效果、建設所需金額等，詳細各卡牌的資訊詳下表。



【圖 2 卡牌種類與各卡牌張數】



【圖 3 卡牌名稱、效果與建設所需金額】

【表 1 各卡牌(建築物)詳細內容與效果】

顏色	建築名稱	骰子點數範圍	建設成本	張數	卡牌效果
藍色	小麥田	1	1 元	10	任何玩家擲出 1，你可從銀行獲得 1 元。
藍色	牧場	2	1 元	6	任何玩家擲出 2，你可從銀行獲得 1 元。
藍色	森林	5	3 元	6	任何玩家擲出 5，你可從銀行獲得 1 元。
藍色	礦場	9	6 元	6	任何玩家擲出 9，你可從銀行獲得 5 元。
藍色	蘋果園	10	3 元	6	任何玩家擲出 10，你可從銀行獲得 3 元。
綠色	麵包店	2~3	1 元	10	當自己骰出 2 或 3，可從銀行獲得 1 元。
綠色	便利商店	4	2 元	6	當自己骰出 4，可從銀行獲得 3 元。
綠色	起司工廠	7	5 元	6	當自己骰出 7，每擁有一張牧場建築，可從銀行獲得 3 元。
綠色	家具工廠	8	3 元	6	當自己骰出 8，每擁有一張森林或礦場建築，可從銀行獲得 3 元。
綠色	蔬果市場	11~12	2 元	6	當自己骰出 11 或 12，每擁有一張小麥田或蘋果園建築，可從銀行獲得 3 元。
紅色	咖啡館	3	2 元	6	如果別人骰出 3，他必須給你 1 元。
紅色	家庭餐廳	9~10	3 元	6	如果別人骰出 9 或 10，他必須給你 2 元。
紫色	商業中心	6	8 元	4	當自己骰出 6，你可與其他玩家交換一間非紫色或褐色的建築物。
紫色	體育館	6	6 元	4	當自己骰出 6，每位玩家都必須給你 2 元。
紫色	電視台	6	7 元	4	當自己骰出 6，可指定任一位玩家給你 5 元。

六、地標建築物卡牌說明：

【表 2 各卡牌(地標建築物)詳細內容與效果】

顏色	建築名稱	骰子數字範圍	建設成本	張數	卡牌效果
褐色	主題樂園	-	16 元	4	如果你骰出兩個相同的數字，在這個回合結束後，可以立刻再進行一個回合。
褐色	廣播電台	-	22 元	4	每回合有一次機會，你可以選擇重新擲骰。
褐色	購物中心	-	10 元	4	你的每間(咖啡館或家庭餐廳或麵包店或便利商店)的建築獲得收入時，都可以額外再多得到 1 元。
褐色	火車站	-	4 元	4	你可以自由選擇使用 1 或 2 顆骰子。

## 肆、研究過程或方法

### 一、機率的意義：

#### (一) 古典機率定義

將機率的觀念以「相同的可能性」來解釋，假設  $S$  為  $n$  個樣本點的樣本空間，且樣本空間中各事件出現的機率相互排斥(互斥)且均等，若事件  $A$  為  $S$  的一事件，則事件  $A$  發生的機率為  $A$  之元素個數與  $n$  的比值。

記為  $P(A) = n(A) / n(S) = n(A) / n$ ，其中  $n(A)$  與  $n(S)$  分別表示  $A$  與  $S$  之元素個數。

例子：銅板有兩個互斥的事件，「正面」與「反面」，若銅板是公正無偏的，

$$n(A) = n(\text{正面}) = 1;$$

$$n(S) = n(\text{正面、反面}) = 2;$$

$$\text{則 } P(\text{正面}) = n(\text{正面}) / n(\text{正面、反面}) = 1/2$$

#### (二) 客觀的機率理論

又稱相對次數的機率理論，指在長期重複的實驗中，事件  $A$  發生的機率為出現該事件之次數與實驗的總次數之比。若以  $n(A)$  表示事件  $A$  出現的次數， $n$  表實驗的總次數，則事件  $E$  發生的機率為：

$$P(A) = n(A) / n, \text{ 其中 } n \text{ 次數很大。}$$

例子：若投擲一枚無偏的銅板 10 次，出現正面的比例可能不會剛好  $1/2$ ，但如果繼續不斷投擲，例如投擲 1000 次，則出現正面的比例會接近  $1/2$ 。

### 二、期望值的意義：

**數學期望值：是試驗中每次可能的結果乘以其結果機率的總和。**

例子：投擲一顆公正的骰子，若出現  $x$  點，則可以得到  $X$  元，試求所獲得金額的期望值？

【表 3 骰子點數、獲得金額與機率列表】

x 點	1	2	3	4	5	6
X 元	1 元	2 元	3 元	4 元	5 元	6 元
P 機率	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$\begin{aligned} \text{期望值 } E(X) &= X_1 * P_1 + X_2 * P_2 + X_3 * P_3 + X_4 * P_4 + X_5 * P_5 + X_6 * P_6 \\ &= 1 * 1/6 + 2 * 1/6 + 3 * 1/6 + 4 * 1/6 + 5 * 1/6 + 6 * 1/6 = 3.5 \end{aligned}$$

## 伍、研究結果

### 一、骰子點數機率計算：

#### (一) 古典機率

利用骰子總和的分析方式，排列所有可能的點數，及各點數的組合方式，可以得到下列的表，代表擲 1 顆或 2 顆骰子的點數機率，列出所有可能的組合。

$$\text{機率 } P = n(A) / n(S) = \text{這個點數事件個數} / \text{總元素個數}$$

以擲一顆骰子的情況，骰子點數共有 1,2,3...6 等 6 種樣本空間 S，其中骰子點數 1,2,3...6 等各事件之個數各只有 1 個，各點數 1 發生機率為 1/6，其他均同。

【表 4 擲 1 顆骰子的點數機率】

骰子點數	事件	事件個數	機率 P
1	[1]	1	1/6
2	[2]	1	1/6
3	[3]	1	1/6
4	[4]	1	1/6
5	[5]	1	1/6
6	[6]	1	1/6
合計	-	6	1

以擲 2 顆骰子的情況，1 顆骰子的點數共有 1,2,3...6，故擲 2 顆骰子之總點數最小為 2，最大總點數為 12，詳列出 2 顆骰子的所有事件以 [x,y] 表示，則樣本空間 S 共有 36 種，骰子總數為 2 時有 [1,1] 之 1 種事件組合，故其機率為 1/36。

【表 5 擲 2 顆骰子的點數機率】

骰子總數	事件組合	組合個數	機率 P
1	無	0	0
2	[1,1]	1	1/36
3	[1,2],[2,1]	2	2/36
4	[1,3],[2,2],[3,1]	3	3/36
5	[1,4],[2,3],[3,2],[4,1]	4	4/36
6	[1,5],[2,4],[3,3],[4,2],[5,1]	5	5/36
7	[1,6],[2,5],[3,4],[4,3],[5,2],[6,1]	6	6/36
8	[2,6],[3,5],[4,4],[5,3],[6,2]	5	5/36
9	[3,6],[4,5],[5,4],[6,3]	4	4/36
10	[4,6],[5,5],[6,4]	3	3/36
11	[5,6],[6,5]	2	2/36
12	[6,6]	1	1/36
合計	-	36	1

## (二) 骰子機率實驗

為了試驗擲骰子的比例是否如理論機率所推估，我們利用不同方式來看每一點出現的次數是否相同。首先，利用手骰和骰子置於盒子內，各骰 120 次，統計各點數出現的次數都不是剛好 20 次(機率 1/6)，反而有一些差異。接著，用電腦亂數產生 1200 次，則各點數出現次數接近 200 次；電腦亂數產生再放大到 12000 次，則各點數次數更接近 2000 了，也就是說，各點數的機率接近理論值 1/6。

採用電腦模擬時，利用微軟 Microsoft Excel 的函數  $f$  RANDBETWEEN(bottom, top)，其功能為「傳回指定之數字間的隨機整數」，其中 Bottom 為最小整數，Top 為最大整數，於 Excel 輸入之函數為 RANDBETWEEN(1, 6)。

【表 6 擲 1 顆骰子的點數實驗機率】

點數	理論機率	手擲次數 (120 次)	盒子內骰 (120 次)	電腦模擬 1 (1200 次)	電腦模擬 2 (12000 次)
1	1/6	18	27	202	2019
2	1/6	17	16	191	1981
3	1/6	21	18	196	1985
4	1/6	21	15	193	2022
5	1/6	24	22	207	1992
6	1/6	19	22	211	2001

以同樣的方式試驗擲 2 顆骰子是否如理論機率所推估，首先利用手擲 360 次並記錄 2 顆骰子相加後的點數和，點數和由 2~12 點依據紀錄，以理論值而言，點數最小與最大的 2 與 12 出現機率最小，點數在中間的 7 出線機率最大，以手擲 360 次結果可看出有此趨勢，兩端次數少而中間次數多，但與理論機率仍有些落差。

利用點腦模擬，增加擲骰次數到 3600 次、36000 次，以 36000 次為例，點數 2 出現次數為 1002 次接近  $1/36$ ，依序皆同，顯示試驗結果與理論機率是接近的。於微軟 Microsoft Excel 計算時，是  $RANDBETWEEN(1, 6) + RANDBETWEEN(1, 6)$ ，兩個 1~6 的隨機整數相加，而非  $RANDBETWEEN(2, 12)$ ，此數字所表示的意思是產出 2~12 的隨機整數。

【表 7 擲 2 顆骰子的點數實驗機率】

點數	理論機率	手擲次數 (360 次)	電腦模擬 1 (3600 次)	電腦模擬 2 (36000 次)
2	$1/36$	7	97	1002
3	$2/36$	24	196	2082
4	$3/36$	30	335	3003
5	$4/36$	47	416	3926
6	$5/36$	45	475	5034
7	$6/36$	64	588	5980
8	$5/36$	55	516	4967
9	$4/36$	32	399	4112
10	$3/36$	29	312	2951
11	$2/36$	17	172	1942
12	$1/36$	10	94	1001

## 二、期望值的計算：

### (一)每擲 1 顆或 2 顆骰子該建築之收入期望值

每張卡牌，有不同的效果(獲得不同的錢)，而骰子的數字有不同的機率，在決定要購買哪一張卡牌賺的錢比較多，要計算「期望值」—「重複多次下可能的平均狀態」。

計算公式 1：骰一次骰子的期望值=(獲得的錢)\*(骰子點數的機率)

但是因為有些卡牌限制是「你自己」或「別人骰」才適用，所以當四個玩家一起玩時，輪到「你自己」的機率是 1/4，輪到「別人」的機率是 3/4

計算公式 2：骰一次骰子的期望值=(獲得的錢)\*(骰子點數的機率)\*(哪一位骰的機率)

以「小麥田」卡牌為例「任何玩家擲出 1 數字，你可從銀行獲得 1 元」，不論任何玩家，每擲出一次骰子時，當你擁有此卡牌時，

1.當擲 1 顆骰子：

收入期望值 = 1 元 \* 1/6 (出現 1 點的機率) \* 4/4 (四個玩家中的任一玩家)

2.當擲 2 顆骰子：

收入期望值 = 1 元 \* 0 (出現 1 點的機率) \* 4/4 (四個玩家中的任一玩家)

以「麵包店」卡牌為例「當你自己骰出 2~3 數字時，可以從銀行獲得 1 元」，不論任何玩家每擲出一次骰子，當你擁有此卡牌時：

1.當擲 1 顆骰子：

收入期望值 = 1 元 \* 2/6 (出現 2~3 點的機率) \* 1/4 (四玩家中輪到你自己)

2.當擲 2 顆骰子：

收入期望值 = 1 元 \* 3/36 (出現 2~3 點的機率) \* 1/4 (四個玩家中輪到你自己)

以「咖啡館」卡牌為例「如果別人擲出 3 數字時，他必須給你 1 元」，不論任何玩家每擲出一次骰子，當你擁有此卡牌時：

1.當擲 1 顆骰子：

收入期望值 = 1 元 \* 1/6 (出現 3 點的機率) \* 3/4 (四玩家中輪到別人)

2.當擲 2 顆骰子：

收入期望值 = 1 元 \* 2/36 (出現 3 點的機率) \* 3/4 (四個玩家中輪到別人)

以體育館卡牌為例「當你自己骰出 6 數字時，每位玩家都必須給你 2 元」，不論任何玩家每擲出一次骰子，當你擁有此卡牌時：

1.當擲 1 顆骰子：

收入期望值 = 6 元 (其他 3 玩家每人給 2 元) \* 1/6 (出現 6 點的機率) \* 1/4 (四  
玩家中輪到你自已)

2.當擲 2 顆骰子：

收入期望值 = 6 元 \* 5/36 (出現 6 點的機率) \* 1/4 (四個玩家中輪到你自已)

另起司工廠、家具工廠與蔬果市場，成立的條件是要先取得藍色卡牌建物，通常是在遊戲進行過半之後，才會購買以增加倍數效果，其中起司工廠之條件為「當你骰出 7 數字時，每擁有 1 張牧場建築，就可以從銀行獲得 3 元」，家具工廠條件是要擁有森林或礦場，蔬果市場條件是要擁有小麥田或蘋果園。

依據藍色建物卡牌數量，牧場共有 6 張，森林與礦場共有 12 張，小麥田與蘋果園共有 16 張，初步假設玩家手上購買起司工廠時至少擁有 2 張牧場，購買家具工廠時至少擁有 3 張森林或礦場，購買蔬果市場時至少擁有 4 張小麥田或蘋果園。

綜上所述，可以得到每一建築卡牌在每一次擲骰時的收入期望值，如下表：

【表 8 各卡牌在擲 1 顆或擲 2 顆骰子時的收入期望值】

建築名稱	收入期望值 (擲 1 顆骰子時)	收入期望值 (擲 2 顆骰子時)
小麥田	$(1) * (1/6) * (4/4) = 4/24 = 24/144$	0
牧場	$(1) * (1/6) * (4/4) = 4/24 = 24/144$	$(1) * (2/36) * (4/4) = 8/144$
森林	$(1) * (1/6) * (4/4) = 4/24 = 24/144$	$(1) * (4/36) * (4/4) = 16/144$
礦場	0	$(5) * (4/36) * (4/4) = 80/144$
蘋果園	0	$(3) * (3/36) * (4/4) = 36/144$
麵包店	$(1) * (2/6) * (1/4) = 2/24 = 12/144$	$(1) * (3/36) * (1/4) = 3/144$
便利商店	$(3) * (1/6) * (1/4) = 3/24 = 18/144$	$(3) * (3/36) * (1/4) = 9/144$
起司工廠	0	$(6) * (6/36) * (1/4) = 36/144$ (2 張牌)
家具工廠	0	$(9) * (5/36) * (1/4) = 45/144$ (3 張牌)
蔬果市場	0	$(12) * (3/36) * (1/4) = 36/144$ (4 張牌)
咖啡館	$(1) * (1/6) * (3/4) = 3/24 = 18/144$	$(1) * (2/36) * (3/4) = 6/144$
家庭餐廳	0	$(2) * (7/36) * (3/4) = 42/144$
商業中心	0	0
體育館	$(6) * (1/6) * (1/4) = 6/24 = 36/144$	$(6) * (5/36) * (1/4) = 30/144$
電視台	$(5) * (1/6) * (1/4) = 5/24 = 30/144$	$(5) * (5/36) * (1/4) = 25/144$

(二)每擲一次骰子該建築之收入期望值

依據規則，當擁有城市地標「火車站」時才能夠選擇擲一顆或兩顆骰子，依據我們遊戲的經驗，一開始只能擲一顆，擲一顆比兩顆骰子的次數比率大約是 6:4，故在下表計算時，我們將擲一顆骰子與擲兩顆骰子依次數比率考量加總計算得到「每擲一次骰子該建築之收入期望值」。取中間值擲一顆骰子機率為 0.6，以及擲一顆骰子機率為 0.5 及 0.7，進行計算。

$$\text{計算公式 3：} \text{骰一次骰子的期望值} = (\text{擲 1 顆骰子的收入}) * (\text{擲 1 顆骰子的機率}) + (\text{擲 2 顆骰子的收入}) * (\text{擲 2 顆骰子的機率})$$

依下表，發現以下幾點：

- 1.在擲 1 顆骰子時，只有骰子範圍在 1~6 的卡牌有機會獲得收入。

- 2.在擲 1 顆骰子時，「小麥田、牧場、森林」等卡牌，因卡牌獲利條件相同，收入期望值也相同，都是 0.17
- 3.在擲 1 顆骰子時，因為體育館與電視台，當擲到數字時的獲利收入高，所以收入期望值較高。

【表 9 各卡牌在每一次擲骰時的收入期望值】

建築名稱	骰子數字範圍	收入期望值 (擲 1 顆骰子時)	收入期望值 (擲 2 顆骰子時)	收入期望值 (擲 1 顆:2 顆 =5:5)	收入期望值 (擲 1 顆:2 顆 =6:4)	收入期望值 (擲 1 顆:2 顆 =7:3)
小麥田	1	0.17	0	0.08	0.10	0.12
牧場	2	0.17	0.06	0.11	0.12	0.13
森林	5	0.17	0.11	0.14	0.14	0.15
礦場	9	0	0.56	0.28	0.22	0.17
蘋果園	10	0	0.25	0.13	0.10	0.08
麵包店	2~3	0.08	0.02	0.05	0.06	0.06
便利商店	4	0.13	0.06	0.09	0.10	0.11
起司工廠	7	0	0.25	0.13	0.10	0.08
家具工廠	8	0	0.31	0.16	0.13	0.09
蔬果市場	11~12	0	0.25	0.13	0.10	0.08
咖啡館	3	0.13	0.04	0.08	0.09	0.10
家庭餐廳	9~10	0	0.29	0.15	0.12	0.09
商業中心	6	0	0	0	0	0
體育館	6	0.25	0.21	0.23	0.23	0.24
電視台	6	0.21	0.17	0.19	0.19	0.20

- 4.在擲 2 顆骰子時，骰子數字範圍在 2~12，相較於擲 1 顆骰子，大部分的卡牌均有機會獲利，其中僅有小麥田因為骰子數字範圍為 1，因為擲 2 顆骰子不可能擲出 1，導致小麥田卡牌無法獲利。
- 5.擲 2 顆骰子時，收入期望值最高的卡牌為礦場 0.56，這是因為該卡牌數字範圍為 9 出現機率高，單次獲利 5 元，單次獲利條件高。
- 6.擲 2 顆骰子時，各點數出現的機率不一樣，其中以點數 6,7,8 的機率較高，由此表顯示，數字範圍為 6,7,8 的卡牌收入期望值均不低。

- 7.在遊戲的實際狀況，各玩家會依據自己的判斷選擇擲 1 顆骰子或擲 2 顆骰子，比較兩者的差異，擲一顆骰子各卡牌的收入期望值較平均介於 0.08~0.25 之間，擲 2 顆骰子時各卡牌的收入期望值差異較大介於 0.06~0.56 之間，如果玩家要擴大競爭差異可能會優先選擇擲 2 顆骰子。
- 8.以擲 1 顆骰子與 2 顆骰子比例為 6:4，加總平均前述 2 者之期望值，收入期望值最高的卡牌為體育館的 0.23，次高為礦場的 0.22。
- 9.以實際遊戲時，數字 6，不論擲 1 顆骰子或擲 2 顆出現機率均高，故以體育館、電視台最不受骰子選擇的影響。

### (三)建物投資成本效益

在遊戲的過程中發現各卡牌的獲利效果不完全相同，例如有些卡牌(例如：小麥田、牧場)獲利 1 元，有些卡牌(例如：起司工廠、家具工廠)獲利 3 元，獲利最高的卡牌為體育館為 6 元。但就成本而言，獲利高者原則上建設成本高，究竟建物的成本效益為何？哪一個建物比較划算？除了前述的收入期望值估算外，應該也要考量收入與成本的比值。

收入的計算包括直覺是評估卡牌標示之收入或收入期望值，分別計算列表如下：

【表 10 各卡牌投資成本效益分析】

建築名稱	骰子數字範圍	建設成本	卡牌標示收入	標示收入/成本	收入期望值 (擲 1 顆:2 顆 =6:4)	期望值/成本
小麥田	1	1	1	1.0	0.10	0.10
牧場	2	1	1	1.0	0.12	0.12
森林	5	3	1	0.3	0.14	0.05
礦場	9	6	5	0.8	0.22	0.04
蘋果園	10	3	3	1.0	0.10	0.03
麵包店	2~3	1	1	1.0	0.06	0.06
便利商店	4	2	3	1.5	0.10	0.05
起司工廠	7	5	6*	1.2	0.10	0.02
家具工廠	8	3	9**	3.0	0.13	0.04
蔬果市場	11~12	2	12***	6.0	0.10	0.05
咖啡館	3	2	1	0.5	0.09	0.05

家庭餐廳	9~10	3	2	0.7	0.12	0.04
商業中心	6	8	-	-	-	-
體育館	6	6	6	1.0	0.23	0.04
電視台	6	7	5	0.7	0.19	0.03

\*假設擁有 2 張牧場；\*\*假設擁有 3 張森林或礦場；\*\*\*假設擁有 4 張小麥田或蘋果園

以直覺式的評估卡牌上所標示的建設成本與收入，則下表中標示收入/成本，效益最高者為 6 的蔬果市場，最低為 0.3 的森林。由於骰子的點數有不同的機率，雖然蔬果市場看似最划算，但探究其骰子數字範圍為 11~12，當玩家擲 1 顆骰子時，出現的機率是 0，擲 2 顆骰子時，出現機率也僅僅為 3/36，不見得真的是最佳選擇的卡牌。

以前述所計算所得的收入期望值可以得出另一個效益指標，此收入期望值已經考量了出現的機率，會比較符合實際遊戲時之狀況，依此，期望值/成本最高者為 0.12 的牧場，其次為 0.10 的小麥田。收入期望值最高的體育館 0.23 及礦場 0.22，因為建設的成本相對高，期望值/成本大約為 0.04，與其他大部分的卡牌相差無幾。

#### (四) 玩家相對收入期望值

在遊戲的過程中發現另一變數，藍色卡牌「任何玩家擲出 x，你可從銀行獲得 y 元」，屬於互相幫助共同獲利；綠色卡牌「當自己骰出 x，可從銀行獲得 y 元」，屬於自己獨賺型；紅色與紫色卡牌「如果別人骰出 x，他必須給你 y 元」屬於設陷阱損人利己型。如果要贏得最後贏家，應該要如何選擇卡牌，就必須考量相對收入期望值，此意思是每擲一次骰子，因為卡牌效果獲得收入時能夠領先其他玩家多少錢的期望值。

思考上述問題，假設四位玩家手上所有的藍色、綠色、紅色、紫色卡牌數量均相等，各類型卡牌如下：

1. 藍色卡牌：互相幫助共同獲利，每次擲骰所有玩家一起增加相同收入，相對收入期望值為+0。
2. 綠色卡牌：屬於自計獨賺型，當輪到自己擲骰時有機會單獨增加相對收入，但當輪到其他玩家時，則由其他玩家增加相對收入，整體遊戲輪迴而言，相對收入期望值為+0。

3.紅色卡牌：設陷阱損人，當輪到別人擲骰時有機會讓自己單獨增加相對收入，但當輪到其他玩家同樣設陷阱損人時，同樣有機會減損自己的收入，故相對收入期望值為+0。

4.紫色卡牌：設陷阱損人利己，當輪到自己擲骰時有機會讓自己單獨增加收入，但當輪到別人擲骰時，同樣可能被指定而給出錢，故相對收入期望值為+0。

既然各卡牌種類並無優劣，但在遊戲中得知，因為各卡牌收入期望值均為正值，如果該卡牌數手持較其他玩家多，則有機會因此擴大領先差距，藉由選擇擲一顆骰子與兩顆骰子的策略，依據手持卡牌較多張的點數分布，選擇擲 1 或 2 顆骰子。

## 陸、討 論

從多次的遊戲間，各玩家均有不同的遊戲策略，綜合討論後，發現如下：

- 一、我們最先發現了擲一顆骰子與二顆骰子出現點數的範圍不同與出現頻率的不同，進而嘗試了解擲二顆骰子時各點數的出現機率。
- 二、在選擇建設哪一張卡牌比較有利時，因為有了出現機率高低不同，所以優先選擇出現機率高、成本能接受的卡牌，進行在老師的指導下，學習了收入期望值的計算。
- 三、建物收入與成本效益，原來就是選擇建物很重要的考量因素之一，因為計算得到收入期望值，進而了解卡牌上標示的收入並不能代表真正的收入，改以收入期望值與成本的比值更能反映選擇卡牌的優劣。
- 四、卡牌中，有不同顏色，也就是不能特性的卡牌，有些是共同獲利，有些是獨賺，有些是損人利己型，進而思考何種卡牌較為有利。

有上述所得的收入期望值發現，初步規劃獲勝的攻略：

- 一、剛開始比賽時，因為只能擲一顆骰子，購買小麥田(4/24)、牧場(4/24)，收入期望值最高，也最便宜。而小麥田在擲兩顆骰子時的期望值是 0，牧場又比小麥田更佳。
- 二、在比賽初期，如果一開始沒有搶到很多小麥田與牧場，就要趕快搶到火車站並且選

擇擲兩顆骰子，因為當擲兩顆骰子時，小麥田與牧場的期望值很低。

三、在比賽中段，如果能擲兩顆骰子時，礦場的期望值最高(80/144)，家具工廠次高(45/144)。

四、在比賽中段，各玩家可以選擇擲一顆或兩顆骰子時，以礦場(0.22)、體育館(0.23)的期望值較高。

五、在比賽中後段，如果購買了很多的牧場與礦場，但桌上此兩類牌已經用盡，可以選擇相關聯的綠色卡，即起司工廠或家具工廠。

六、最後比較收入期望值/成本比值，牧場(0.12)的效益最高。

## 柒、結 論

一、骰子點數：哪個骰子點數比較容易出現？

A：以一顆骰子而言，如果是正常公正無偏的骰子，是一個正立方體共有六面，各點數與其他點數不可能同時出現，各點數各佔有一面，所以 1~6 點數出現的機率都相等為  $1/6$ 。以二顆骰子而言，二骰子點數相加後最小和為 2 點，最大和為 12 點，而中間的點數如 7 點，可以有 [1,6]、[2,5]、[3,4] 等不同組合，列出各點數組合後，可以得到機率，發現中間點數的機率因為組合數較多，會比兩端點數的機率高。

透過實際手擲骰子測試，輔助電腦大量測試，同樣證明前述的趨勢。

二、卡牌種類：要選擇互相幫助共同獲利的藍色卡？靠自己獨賺的綠色卡？或是設陷阱收對手錢的紅色及紫色卡？

A：要選擇哪種卡牌較為有利，所要考量的策略有很多包括對應各卡牌收入、點數出現機率(以擲 1 顆或 2 顆骰子)、建設成本等，我們利用計算各卡牌的收入期望值，輔以收入與成本效益，原則上，數值愈高的卡牌越有利。

若考量各卡牌的種類特性，假設各玩家手持卡牌數量均相等、擲骰的機率相等的情況下，雖然有互相幫助共同獲利的藍色卡、靠自己獨賺的綠色卡或是設陷阱收對手錢的紅色及紫色卡，但相對收入期望值都相同。但實際情境上，由於玩家在取得卡牌的策略上並不相同、在短期遊戲中擲骰運氣也不同，策略上，以優先選擇高收入期望值的卡牌，依據該卡牌所需點數的條件，搭配擲 1 顆或 2 顆的策略，最為有利。

三、骰子的數字：選擇要骰一顆骰子比較有利？還是兩顆骰子比較有利？

A：如果手上很多小麥田與牧場，骰一顆骰子有利；反之，如果一開始沒有搶到很多小麥田與牧場，可以趕快取得火車站選擇擲兩顆骰子。

四、城市地標順序：四大城市地標建設的優先順序？

A：我們設定了四種順序，玩了幾次後，類型一的組合贏最多次，至於是否合乎期望值的趨勢，只要玩很多次，就能找到平均的趨勢了。

順序	類型一	類型二	類型三	類型四
1	購物中心	火車站	廣播電台	主題樂園
2	廣播電台	廣播電台	購物中心	廣播電台
3	火車站	購物中心	火車站	購物中心
4	主題樂園	主題樂園	主題樂園	火車站

## 捌、參考資料及其他

一、林信安（無日期）。高中數學第四冊 3-3 期望值。民 107 年 11 月 24 日，取自：

<http://math1.ck.tp.edu.tw/林信安/學術研究/上課講義/第四冊/3-3 期望值.pdf>。

二、Gomdori co.（2014）。明日數學王 1：機率與運氣（徐月珠譯）。台北市：三采文化。

三、骰子街說明書。